CAPITOLO 3

PRINCIPI DEL MASSIMO

3.1 PRINCIPI DEL MASSIMO IN FORMA DEBOLE

Richiamiamo il principio del massimo debole per funzioni subarmoniche regolari.

Teorema 3.1.1 *Sia Ω limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subarmonica, cioè $\Delta u \geq 0$. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Vogliamo estendere tale risultato a operatori della forma

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) \tag{3.1}$$

definiti in $C^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, con i coefficienti b_i, c, $a_{ij} = a_{ji} \in C(\overline{\Omega})$ reali e verificanti la condizione di uniforme ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

per un'opportuna costante $\nu_0 > 0$.

Teorema 3.1.2 (Principio del massimo debole) *Sia $c \equiv 0$ in Ω e sia u in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che $Au \geq 0$ in Ω. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.2}$$

Se invece $Au \leq 0$ allora

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno preliminarmente del seguente risultato di algebra lineare.

Lemma 3.1.3 *Siano $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^N$ due matrici reali e simmetriche, rispettivamente semidefinita positiva e semidefinita negativa. Allora*

$$\mathit{tr}\,(BC) = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} c_{ij} \leq 0.$$

DIM. Siccome B è una matrice reale e simmetrica, essa è diagonalizzabile mediante una matrice di passaggio U ortogonale, cioè

$$D = UBU^{-1},$$

con $D = [\beta_1, \dots, \beta_N]$ matrice diagonale degli autovalori di B. Consideriamo la matrice $E = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^N$ data da $E = UCU^{-1}$. Siccome U è ortogonale, E è ancora simmetrica. Inoltre D ed E sono semidefinite positiva e negativa rispettivamente, per cui i loro elementi sulla diagonale principale verificano la proprietà: $\beta_i \geq 0$ e $\gamma_{ii} \leq 0$ per ogni i. Ne segue che

$$\mathrm{tr}(DE) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \gamma_{ii} \leq 0.$$

A questo punto, risulta

$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(U^{-1}DUU^{-1}EU) = \mathrm{tr}(U^{-1}DEU) = \mathrm{tr}(DE) \leq 0,$$

che è la tesi. □

DIM. (TEOREMA) Proviamo anzitutto che se $Au > 0$ allora u non può avere un massimo interno. Procedendo per assurdo, supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Siccome x_0 è interno, risulta che $\nabla u(x_0) = 0$ e la matrice Hessiana di u in questo punto, $(D_{ij}u(x_0))$, è semidefinita negativa.

L'ipotesi di ellitticità sull'operatore A implica che la matrice $(a_{ij}(x_0))$, reale e simmetrica, è definita positiva, per cui, applicando il Lemma 3.1.3, si deduce che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) D_{ij} u(x_0) \leq 0.$$

Allora $(Au)(x_0) \leq 0$, il che chiaramente contraddice l'ipotesi $Au > 0$.

Se $Au \geq 0$ ci si può ricondurre al caso precedente introducendo un'opportuna funzione ausiliaria. Precisamente, consideriamo $e^{\lambda x_1}$, dove $\lambda > 0$ è un parametro da determinare. Allora si ha

$$\begin{aligned} A(e^{\lambda x_1}) &= a_{11}(x)\lambda^2 e^{\lambda x_1} + b_1(x)\lambda e^{\lambda x_1} = \lambda e^{\lambda x_1}(b_1(x) + \lambda a_{11}(x)) \\ &\geq \lambda e^{\lambda x_1}(b_1(x) + \lambda \nu_0) \geq \lambda e^{\lambda x_1}(\lambda \nu_0 - \|b_1\|_\infty). \end{aligned}$$

Scelto $\lambda_0 > 0$ in modo tale che $\lambda_0\nu_0 - \|b_1\|_\infty > 0$ si ottiene pertanto che $Ae^{\lambda_0 x_1} > 0$. A questo punto, sia $u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{\lambda_0 x_1}$. Allora $Au_\varepsilon = Au + \varepsilon A e^{\lambda_0 x_1} > 0$ e applicando quanto dimostrato nella prima parte si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Infine, siccome u_ε converge uniformemente ad u in $\overline{\Omega}$, quando $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon &\longrightarrow \max_{\overline{\Omega}} u \qquad \text{per } \varepsilon \to 0 \\ \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon &\longrightarrow \max_{\partial\Omega} u \qquad \text{per } \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

Scambiando u con $-u$ si ottiene il principio del minimo quando $Au \le 0$. □

Corollario 3.1.4 (Principio del massimo modulo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è tale che $Au = 0$, allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Per conseguire la tesi è sufficiente osservare che

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max\left\{\max_{\overline{\Omega}} u, -\min_{\overline{\Omega}} u\right\}$$

e applicare il teorema precedente. □

Un'immediata conseguenza del principio del massimo modulo è il teorema di unicità della soluzione per il problema di Dirichlet associato ad A.

A questo punto, è naturale chiedersi cosa succede se viene meno l'ipotesi che $c \equiv 0$: qualora $c \not\equiv 0$, è importante conoscere il suo segno. Per capire il motivo di ciò, prendiamo ad esempio come operatore $\Delta + c$, con c costante positiva. Se valesse un principio del massimo debole allora, con le stesse tappe di prima, arriveremmo a un teorema di unicità per il problema

$$\begin{cases} \Delta u = -c\, u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ma il Laplaciano, in quanto operatore dissipativo, autoaggiunto con risolvente compatto, ammette una successione di autovalori $\lambda_n < 0$, che decrescono a $-\infty$, sicchè i problemi

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda_n\, u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

chiaramente non hanno un'unica soluzione.

Da questo esempio, si comprende che per poter ottenere un principio del massimo quando $c \not\equiv 0$, bisogna supporre necessariamente $c \le 0$.

Teorema 3.1.5 (Principio del massimo debole) *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e supponiamo che $c \leq 0$. Allora risulta*

(i) $Au \geq 0$ *in* $\Omega \Longrightarrow \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$,

(ii) $Au \leq 0$ *in* $\Omega \Longrightarrow \min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$.

DIM. (i) Se $u \leq 0$ in Ω, allora la tesi è ovvia. Altrimenti $V = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ è un aperto non vuoto di Ω. Posto $B = A - c$, si ha che $Bu = Au - cu \geq 0$ in V e quindi, dal Teorema 3.1.2

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial V} u^+$$

siccome $u \geq 0$ su $\overline{V}$. Risulta $\max_{\overline{V}} u = \max_{\overline{\Omega}} u$, visto che, fuori di V, $u(x) \leq 0$. Proviamo infine che $\max_{\partial V} u^+ = \max_{\partial\Omega} u^+$. Osserviamo che $\partial V = (\partial V \cap \Omega) \cup (\partial V \cap \partial\Omega)$ e che $u \equiv 0$ su $\partial V \cap \Omega$, $u \leq 0$ su $\partial\Omega \setminus \partial V$. Allora $\max_{\partial V} u^+ = \max_{\partial V \cap \partial\Omega} u^+ = \max_{\partial\Omega} u^+$. Questo prova (i).

(ii) Con un semplice cambio di segno possiamo ricondurci al caso precedente. Infatti

$$\begin{aligned} Au \leq 0 \;\Rightarrow\; A(-u) \geq 0 \;\Rightarrow\; & \max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+ \\ \Rightarrow\; & \min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-. \end{aligned}$$

□

Corollario 3.1.6 (Principio del massimo modulo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è tale che $Au = 0$ e se $c \leq 0$, allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Anche stavolta scriviamo $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max \left\{ \max_{\overline{\Omega}} u, -\min_{\overline{\Omega}} u \right\}$. Se $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora dalla (i) del Teorema 3.1.5 segue che

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Siccome l'altra disuguaglianza è ovvia, concludiamo che $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

Si procede in modo del tutto analogo se $\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u$. □

Deduciamo adesso un teorema di unicità per il problema di Dirichlet associato ad A e un principio di confronto, utile nelle applicazioni.

Proposizione 3.1.7 *Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e sia $c \le 0$. Allora*

(i) $Au = Av$ *in* Ω, $u = v$ *su* $\partial\Omega \Rightarrow u = v$ *in* Ω.

(ii) $Au \ge Av$ *in* Ω, $u \le v$ *su* $\partial\Omega \Rightarrow u \le v$ *in* Ω.

Proviamo di seguito una stima a priori per l'equazione $Au = f$ che sarà usata nel Capitolo 5. Nella dimostrazione useremo il seguente lemma.

Lemma 3.1.8 *Sia Ω limitato e $c \le 0$. Esiste $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi > 0$ in Ω e $A\phi \le -1$ in Ω.*

DIM. Sia $\psi(x) = \cosh \mu x_1$. Allora

$$\begin{aligned} A\psi &= a_{11}\mu^2 \cosh \mu x_1 + b_1 \mu \sinh \mu x_1 + c \cosh \mu x_1 \\ &\ge (\nu_0 \mu^2 - \|b_1\|_\infty \mu - \|c\|_\infty) \cosh \mu x_1. \end{aligned}$$

Fissiamo μ sufficientemente grande e otteniamo $A\psi \ge 1$. Basta adesso prendere $\phi(x) = \cosh \mu R - \cosh \mu x_1$, dove $R > 0$ è tale che $\Omega \subseteq B_R(0)$. □

Proposizione 3.1.9 *Sia Ω limitato, $c \le 0$. Esiste $C = C(\Omega) > 0$ tale che per ogni $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\|u\|_\infty \le C\|Au\|_\infty + \max_{\partial\Omega} |u|.$$

DIM. Sia $v = u - \|Au\|_\infty \phi - \max_{\partial\Omega} |u|$, dove ϕ è la funzione del Lemma 3.1.8. E' immediato verificare che $Av \ge 0$ in Ω e che $v \le 0$ su $\partial\Omega$. Per il Teorema 3.1.5, $v \le 0$ in Ω e quindi $u \le C\|Au\|_\infty + \max_{\partial\Omega} |u|$, $C = \cosh \mu R$. Scambiando u on $-u$ si conclude la dimostrazione. □

Per il seguito è necessario considerare anche i casi dell'intero spazio e del semispazio.

Proposizione 3.1.10 *Supponiamo $c \le 0$. Siano $\lambda > 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda u - Au = f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\|u\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

DIM. Consideriamo la funzione $v(x) = \gamma + |x|^2$, con $\gamma > 0$ parametro da determinare. Risulta allora

$$Av(x) = 2\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) + 2\sum_{i=1}^N b_i(x)x_i + c(x)v(x) \le \alpha + \beta|x|$$

con α e β costanti positive opportune. Scelto γ in modo tale che

$$\alpha + \beta|x| \le \lambda(\gamma + |x|^2) = \lambda v(x) \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

(per esempio, se $\eta = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}(\alpha + \beta|x| - \lambda|x|^2)$, basta prendere $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$), si ha

$$Av \leq \lambda v \qquad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

Poniamo $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$. Siccome $\lim_{|x|\to\infty} u_\varepsilon(x) = -\infty$, u_ε ha un punto di massimo assoluto in un certo x_0 e quindi

$$Au_\varepsilon(x_0) \leq 0. \tag{3.3}$$

Inoltre

$$\lambda u_\varepsilon - Au_\varepsilon = \lambda u - Au - \varepsilon(\lambda v - Av) = f - \varepsilon(\lambda v - Av) \leq f. \tag{3.4}$$

Da (3.3) e (3.4) segue allora che

$$\lambda u_\varepsilon(x_0) \leq \lambda u_\varepsilon(x_0) - Au_\varepsilon(x_0) \leq f(x_0) \leq \|f\|_\infty$$

e quindi

$$u(x) - \varepsilon v(x) = u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_0) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Facendo il limite per $\varepsilon \to 0$ della disuguaglianza precedente otteniamo

$$u(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Le stesse argomentazioni applicate alla funzione $-u$ portano ad avere $\|u\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$, cioè la tesi. □

Osservazione 3.1.11 Il teorema precedente continua a valere anche se i coefficienti sono illimitati richiedendo che

$$\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)x_i \leq k(1 + |x|^2), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

per qualche costante $k > 0$.

Come conseguenza del principio del massimo appena provato deduciamo l'unicità di una soluzione limitata dell'equazione $\lambda u - Au = f$.

Corollario 3.1.12 *Sia $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Se $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$ risolvono l'equazione $\lambda u - Au = f$, allora $u_1 \equiv u_2$.*

DIM. Posto $u = u_1 - u_2$, risulta $\lambda u - Au = 0$. Per la Proposizione 3.1.10 vale allora $\|u\|_\infty \leq 0$, ossia $u \equiv 0$ e quindi $u_1 \equiv u_2$ in $\mathbb{R}^N$. □

Teorema 3.1.13 *Supponiamo $c \le 0$, $\lambda > 0$. Siano $u \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C_b(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$, con $u(x', 0) = 0$. Allora, posto $\lambda u - Au = f$, si ha*

$$\|u\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

DIM. La dimostrazione è del tutto simile a quella fatta per $\mathbb{R}^N$.

Poniamo $v(x) = \gamma + |x|^2$, e scegliamo γ tale che $Av(x) \le \lambda v(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_+$. Definiamo $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon v(x)$; siccome $\lim_{|x|\to+\infty} u_\varepsilon(x) = -\infty$, u_ε ammette un punto di massimo assoluto x_0. Supponiamo che $u_\varepsilon(x_0) > 0$ e osserviamo che $x_0 \notin \mathbb{R}^{N-1}$. Pertanto $x_0 \in \mathbb{R}^N_+$ e

$$Au_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0) D_{ij} u_\varepsilon(x_0) + \sum_{i=1}^N b_i D_i u_\varepsilon(x_0) + c(x_0) u_\varepsilon(x_0) \le 0$$

(confronta il Lemma 3.1.3 e il Teorema 3.1.2). Ne segue che

$$\begin{aligned} \lambda u_\varepsilon(x_0) &\le \lambda u_\varepsilon(x_0) - Au_\varepsilon(x_0) \\ &= \lambda u(x_0) - Au(x_0) - \varepsilon(\lambda v(x_0) - Av(x_0)) \\ &\le f(x_0) \le \|f\|_\infty \end{aligned}$$

cioè

$$u_\varepsilon(x_0) \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

Se $u_\varepsilon(x_0) \le 0$, la disuguaglianza precedente è ovvia perchè $u_\varepsilon(x_0) \le 0 \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}$. Allora per ogni x vale

$$u(x) - \varepsilon v(x) = u_\varepsilon(x) \le u_\varepsilon(x_0) \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda}.$$

Per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$u(x) \le \frac{\|f\|_\infty}{\lambda} \qquad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{3.5}$$

Applicando le stesse argomentazioni alla funzione $-u$ otteniamo la tesi. □

3.2 PRINCIPI DEL MASSIMO IN FORMA FORTE

Sebbene il principio del massimo debole sia sufficiente per molte applicazioni, spesso è necessario disporre di una versione ”forte” che escluda l’esistenza di un massimo interno per soluzioni non costanti. Un tale principio per il Laplaciano si enuncia nel seguente modo.

Teorema 3.2.1 *Sia Ω un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia u subarmonica in Ω. Se esiste un punto x_0 interno a Ω tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora u è costante.*

Tipicamente la dimostrazione di questo teorema si poggia su un argomento che caratterizza le funzioni subarmoniche e che è rappresentato dalla disuguaglianza del valor medio:

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \implies \forall\, B_R(y) \subset\subset \Omega \quad u(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)dx.$$

Tale proprietà non ha un analogo nel caso di operatori di forma più generale e di conseguenza la dimostrazione del principio del massimo forte per il Laplaciano non può essere estesa al caso generale. In alternativa, scegliamo di seguire il metodo di Hopf, che poggia sul seguente lemma.

Lemma 3.2.2 *Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$. Supponiamo che $Au \geq 0$ in Ω con $c \equiv 0$ e che esista $x_0 \in \partial\Omega$ tale che*

(i) u *è continua in* x_0,

(ii) $u(x_0) > u(x)$ *, per ogni* $x \in \Omega$,

(iii) $\partial\Omega$ *verifica la proprietà della palla interna in* x_0, *cioè esiste* $B_R(y) \subset \Omega$ *tale che* $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Se esiste la derivata direzionale di u in x_0 rispetto alla normale esterna ν a $B_R(y)$, allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se $c \leq 0$ la stessa conclusione vale a patto che $u(x_0) \geq 0$. Infine se $u(x_0) = 0$, la tesi è vera indipendentemente dal segno di c.

DIM. Per l'ipotesi (iii), esiste una palla $B_R(y) \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B_R(y)$; prendendo eventualmente una palla più piccola $B_{R'}(y') \subseteq B_R(y)$ con centro y' sul segmento $\overline{yx_0}$, possiamo supporre che $\overline{B}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Se $0 < \varrho < R$, consideriamo la corona circolare $\mathcal{C} = B_R(y) \setminus \overline{B}_\varrho(y)$ e definiamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}, \qquad \forall\, x \in \mathcal{C}$$

con α costante positiva da determinare. Osserviamo che $v(x) > 0$ in $\mathcal{C}$ e $v(x) = 0$ su $\partial B_R(y)$. Inoltre $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \Omega \cup \{x_0\}$.

Ora, come conseguenza della condizione di ellitticità sull'operatore A e della limitatezza dei suoi coefficienti, risulta

$$\begin{aligned}(Av)(x) \;=\; & e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\\ & -2\alpha\sum_{i=1}^{N}a_{ii}(x)-2\alpha\sum_{i=1}^{N}b_i(x)(x_i-y_i)\\ & +c(x)\big(1-e^{-\alpha(R^2-|x-y|^2)}\big)\Big]\\ \geq\; & e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\nu_0|x-y|^2-2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sum_{i=1}^{N}a_{ii}(x)\Big)\\ & -2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}|b(x)|\Big)|x-y|-\sup_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|\Big]\\ \geq\; & e^{-\alpha|x-y|^2}\Big[4\alpha^2\nu_0\varrho^2-2\alpha\Big(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\sum_{i=1}^{N}a_{ii}(x)\Big)\\ & -2\alpha R\sup_{x\in\overline{\Omega}}|b(x)|-\sup_{x\in\overline{\Omega}}|c(x)|\Big]\end{aligned}$$

dove $b=(b_1,...,b_N)$. A questo punto, scegliamo α in modo tale che la quantità scritta tra parentesi risulti positiva. Così si ha $Av\geq 0$ in $\mathcal{C}$. Siccome $u(x)-u(x_0)<0$ in Ω, esiste $\varepsilon>0$ tale che $w(x)=u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\leq 0$ su $\partial B_\varrho(y)\subset\Omega$. Tale disuguaglianza è verificata anche su $\partial B_R(y)$, dove $v=0$. Pertanto la funzione w gode di queste proprietà: $Aw(x)=Au(x)-c(x)u(x_0)+\varepsilon Av(x)\geq -c(x)u(x_0)\geq 0$, per ogni $x\in\mathcal{C}$, nelle ipotesi dell'enunciato, e $w\leq 0$ su $\partial\mathcal{C}$. Il principio del massimo debole (Teorema 3.1.5) implica adesso che $w\leq 0$ in tutto $\mathcal{C}$ (a tale proposito osserviamo che la continuità di w su $\overline{\mathcal{C}}$, richiesta dal principio applicato, è conseguenza di (i) e del fatto che $\overline{\mathcal{C}}\subseteq\Omega\cup\{x_0\}$). Calcolando la derivata normale di w nel punto x_0, si ha

$$\frac{\partial w}{\partial\nu}(x_0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{w(x_0+t\,\nu)-w(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{w(x_0+t\,\nu)}{t}\geq 0$$

da cui segue, come richiesto, che

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial\nu}(x_0)=\varepsilon 2\alpha Re^{-\alpha R^2}>0.$$

□

Osserviamo che la disuguaglianza $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)\geq 0$ è ovvia perchè x_0 è punto di massimo. La difficoltà nel lemma è ottenere la disuguaglianza stretta $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x_0)>0$.

A questo punto siamo in grado di dimostrare il seguente

Teorema 3.2.3 (Principio del massimo forte) *Sia Ω un aperto connesso limitato e sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Au \geq 0$ (risp. $Au \leq 0$) in Ω.*

- *Se $c \equiv 0$ e $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ (risp. $u(x_0) = \min_{\Omega} u$), per qualche $x_0 \in \Omega$, allora u è costante.*
- *Se $c \leq 0$ e $u(x_0) = \max_{\Omega} u \geq 0$ (risp. $u(x_0) = \min_{\Omega} u \leq 0$), con $x_0 \in \Omega$ allora u è costante.*

DIM. Supponiamo per assurdo che u non sia costante e che raggiunga il suo massimo M in un punto x_0 all'interno di Ω. Posto

$$\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\} \quad \text{e} \quad E = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$$

risulta pertanto che $E,\ \Omega^- \neq \emptyset$. Sia $x_1 \in \Omega^-$ e $\gamma : [0,1] \to \Omega$ una curva continua congiungente i punti x_0 e x_1, cioè tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Siccome Ω^- è aperto, esiste $\overline{t} \in]0,1[$ con $\gamma(\overline{t}) \notin \Omega^-$ e $\gamma(t) \in \Omega^-$ se $t \in]\overline{t}, 1]$. Sia $\overline{x} = \gamma(\overline{t}) \in E$ e $y = \gamma(t) \in \Omega$ con $t > \overline{t}$ tale che dist$(y, \overline{x}) <$ dist$(y, \partial\Omega)$. Allora $r =$ dist$(y, E) \leq$ dist$(y, \overline{x}) <$ dist$(y, \partial\Omega)$. Consideriamo la palla $B_r(y)$ e un punto $z_0 \in E$ tale che dist$(y, z_0) = r$. Il punto z_0 soddisfa ora le ipotesi del lemma precedente relativamente all'aperto Ω^-. Siccome $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(z_0) > 0$ (ν è la normale esterna a $B_r(y)$), allora $\nabla u(z_0) \neq 0$. Questo è però impossibile in un punto di massimo interno. $\square$